History and Pedagogy of Mathematics
Americas Section, West Coast Meeting
Point Loma Nazarene University

1-2 October 2011

# Alfred Tarski:
# Problems for Students and Teachers

James T. Smith, Professor Emeritus
San Francisco State University

*Joint work with Andrew and Joanna McFarland, of Płock, Poland.*

# Tarski: Problems for Students and Teachers

James T. Smith

- Who was Alfred Tarski?
  - 1901–1939, Warsaw; 1942–1983, Berkeley
  - 1923–1953: perfected our framework for research in mathematical logic.
  - 1953–1983: its preeminent figure
  - My teacher's teacher, my external PhD examiner
- Biography
  - Feferman & Feferman 2004
- Background
  - Smith 2010 (October 2010 HPM meeting)
  - Sznajder 2010 (March 2010 HPM meeting)

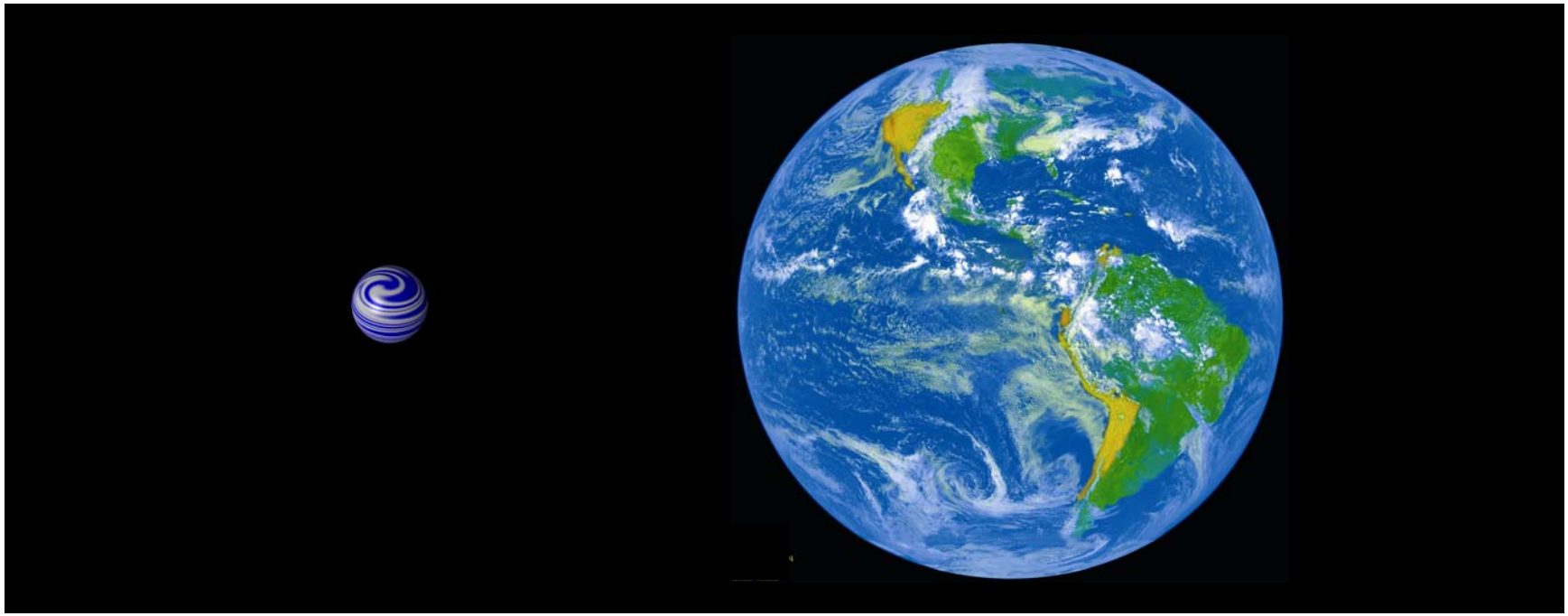
## Tarski’s Schooling

- Born 1901, in Warsaw, then part of Russia
- High school 1915–1918 there, during German occupation
- University 1919–1924, during Bolshevik war & birth of Polish republic
- 1923–1924, dissertation and papers on Stanisław Leśniewski's logic

# Tarski's Early Career (1)

- **1924, seminal papers on interrelations between**
  - **definitions of finiteness**
  - **axiom of choice**
  - **cardinal arithmetic**

- **1924, the famous paper with Stefan Banach:**
  - **In $\mathbb{R}^3$ *any* two bounded sets with interior are decomposible into = finite numbers of disjoint $\cong$ sets.**



# Tarski's Early Career (2)

- **1925–1939**
  - **Taught geometry at the Stefan Żeromski school, Warsaw.**
  - **Tarski** $\nearrow$ **high-school teacher**
    $\searrow$ **postdoc $\rightarrow$ lecturer**

    **Never a professor in Poland, but known worldwide in logic.**

- **1927–1928 logic seminar, Warsaw University**
  - **Axioms for elementary real arithmetic, geometry**
  - **Elimination of quantifiers $\Rightarrow$ decision procedures**
  - **Not published in any detail until 20–30 years later**

# *Parametr* (1)

- **1929** **Tarski argued for an organization for teaching, independent of the research community.**

- **1930** **Antoni M. RUSIECKI started *Parametr*, for gimnasjum teachers and their best students**
  - **Government administrator/supervisor**
    - **curriculum developer**
    - **teacher trainer**
    - **interface with universities**
    - **entrepreneur**
  - **Discovered Mark Kac (Kac autobiography)**
  - **Good subject for research**

- **1931** **Material for students → supplement, *Młody matematyk* (*Young Mathematician*)**

TOM 1 ZESZYT 1

# PARAMETR

CZASOPISMO POŚWIĘCONE NAUCZANIU MATEMATYKI

WYCHODZI
POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA

WARSZAWA — POZNAŃ

1930

# PARAMETR

TOM 1, ZESZYT 1. STYCZEŃ 1930.

## TREŚĆ:



**Artykuły**, listy do Redakcji, egzemplarze książek i czasopism należy adresować do Redaktora Antoniego Marjana Rusieckiego — Warszawa, ul. Koszykowa Nr. 31—5. (Telefon 441-17).

**Prenumeratę** i wszelkie sprawy administracyjne należy kierować do Administracji „Parametra" — Poznań, Al. Marcinkowskiego 22. (Konto czekowe P. K. O. 200.032. Drukarnia i Księgarnia św. Wojciecha. Poznań.)

**Prenumerata** roczna (za 10 zeszytów) wynosi zł 15.—; półroczna (za 5 zeszytów) — zł 8.— Zagranicą abonament roczny — zł 20.—, półroczny zł 10.—.

Cena poszczególnych zeszytów „Parametra" zł 1.80.

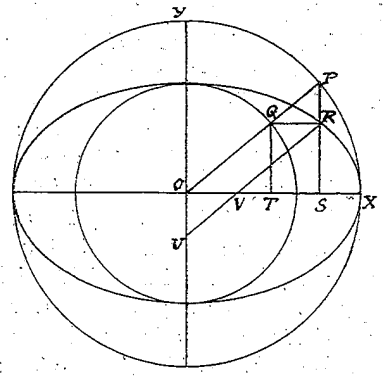
Podpisane do druku 3. I. 1930.

ANTONI MARJAN RUSIECKI (Warszawa). [26]

## Elipsograf Antoniego Wasilewicza.

Jeżeli wyznaczymy rzut prostopadły okręgu, leżącego w płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny rzutów, to otrzymamy elipsę. Jedna ze średnic okręgu, mianowicie średnica równoległa do płaszczyzny rzutów, zachowuje w rzucie swą długość i daje wielką oś elipsy $2a$; średnica okręgu, prostopadła do tej średnicy, daje w rzucie małą oś elipsy $2b$, a wszystkie cięciwy do niej równoległe podlegają skróceniu w tym samym stosunku $b : a$.

Na tej własności elipsy opiera się sposób jej kreślenia przy pomocy okręgu opisanego i okręgu wpisanego.




Kreślimy dwie osi do siebie prostopadłe $OX$ i $OY$. Z punktu $O$ jako ze środka zataczamy promieniami $a$ i $b$ dwa okręgi; jeden z tych okręgów będzie opisany na elipsie, a drugi wpisany w elipsę.

Przypuśćmy, że dookoła środka $O$ obraca się ruchoma prosta $m$, która w pewnem położeniu przecina okręgi w punktach $P$ i $Q$. Kreślimy $PS \parallel OY$ i $QR \parallel OX$; punkt $R$ przecięcia tych prostych jest jednym z punktów elipsy, mającej osi $2a$ i $2b$ na prostych $OX$ i $OY$.

W samej rzeczy, mamy

$$SR = TQ$$
$$TQ : SP = OQ : OP;$$

oznaczając rzędną $SP$ punktu na okręgu przez $y$, a rzędną $SR$ jego rzutu na elipsie przez $y'$, otrzymujemy proporcję

$$y' : y = b : a.$$

Proporcja ta wyraża znaną własność elipsy jako rzutu okręgu.



Poprowadźmy teraz przez punkt $R$ prostą równoległą do prostej $OP$. Punkty przecięcia tej prostej z osiami $OY$ i $OX$ oznaczamy odpowiednio przez $U$ i $V$. Ponieważ figury $OPRU$ i $OQRV$ są równoległobokami, przeto mamy

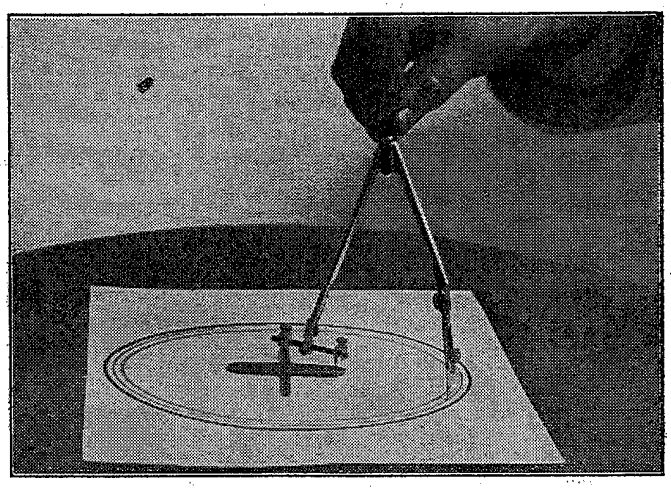
$$UR = OP, \text{ czyli } UR = a,$$
$$VR = OQ, \text{ czyli } VR = b,$$
$$UV = a - b.$$

Stąd widzimy, że jeżeli prosta, na której leżą sztywnie ze sobą sprzężone punkty $U$, $V$ i $R$, porusza się w ten sposób, że punkty $U$ i $V$ posuwają się odpowiednio po osiach $OY$ i $OX$, to punkt $R$ zakreśla elipsę; półosiami tej elipsy na prostych $OX$ i $OY$ są odcinki $UR = a$ i $VR = b$.

Na tej zasadzie opiera się konstrukcja przyrządów do mechanicznego wykreślania elips — t. zw. *elipsografów*. Sama zasada znana była już w starożytności. Pierwszej technicznej realizacji elipsografu miał podobno dokonać Leonardo da Vinci.

Znajdujące się na rynku elipsografy są dość kosztowne (około 200 złotych).

Artysta-rzeźbiarz p. Antoni Wasilewicz wpadł na pomysł nader prostego zastosowania konstrukcyjnej zasady elipsografów i stworzył *„elipsograf dostosowany do cyrkla"*.



Ze zwykłego cyrkla technicznego wyjmuje się przymocowane na śrubce ostrze nóżki cyrkla i na miejsce tego ostrza przykręca się sztabkę metalową z dwiema ruchomemi nóżkami.

ROK 1 MARZEC 1931 NR. 3

# MŁODY MATEMATYK

CZASOPISMO DLA MŁODZIEŻY SZKOLNEJ
WYCHODZI POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO
PRZY WSPÓŁUDZIALE S. STRASZEWICZA.



DR. JAN GADOMSKI (Warszawa).

## Odkrycie Plutona.

Jednem z najciekawszych dla miłośników nieba wydarzeń astronomicznych w ciągu lat ostatnich jest odkrycie nowej, dziewiątej „wielkiej" planety systemu słonecznego. Okoliczności, towarzyszące jej odszukaniu, zasługują ze wszech miar na uw
Obrazują one w sposób wyraźny ustawiczne wysiłk
kiej, dążącej wytrwale ku Prawdzie. Bada
nemi trudnościami, niemal od lat s
kolwiek problem chwila
Właściw

Tarski [1931] 2012a

*On the Degree of Equivalence of Polygons*

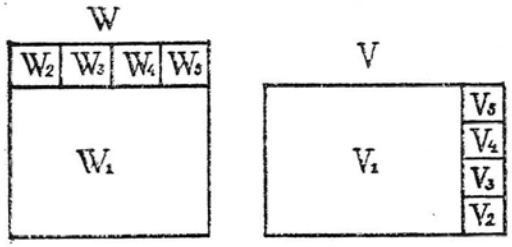


DR. ALFRED TARSKI (Warszawa).

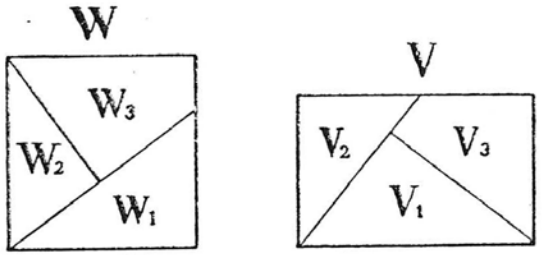
## O stopniu równoważności wielokątów.

W artykule tym pragnę omówić pewne pojęcia, należące całkowicie do zakresu geometrji elementarnej, a dotąd niemal wcale nie zbadane.

Jak wiadomo, dwa wielokąty $W$ i $V$ nazywamy *równoważnemi*, wyrażając to wzorem: $W \equiv V$, jeżeli dają się one podzielić na jednakową ilość wielokątów odpowiednio przystających. Ten podział wielokątów równoważnych na części przystające nie jest jednoznaczny: dwa wielokąty równoważne dają się podzielić na części przystające w sposób rozmaity zarówno pod względem liczby, jak i kształtu tych części. Wyjaśnimy to na przykładzie.




Rys. 1.




Rys. 2.

Zarówno rys. 1, jak i rys. 2, wykazują, że kwadrat o boku $a$ oraz prostokąt o bokach $\frac{5}{4}a$ i $\frac{4}{5}a$ są sobie równoważne, ale ich podziały na obu rysunkach są zgoła różne.

W związku z tem spostrzeżeniem nasuwa się w sposób naturalny pytanie: na jaką *najmniejszą* liczbę części odpowiednio przystających można podzielić dwa dane wielokąty równoważne? Zagadnienia tego właśnie typu pragniemy poruszyć w „Parametrze".

W tym celu przyjmiemy następującą definicję:

*Stopniem równoważności* dwóch wielokątów równoważnych $W$ i $V$ nazywamy *najmniejszą* liczbę naturalną $n$, czyniącą zadość warunkowi: każdy z wielokątów $W$ i $V$ daje się podzielić na $n$ wielokątów w ten sposób, że wielokąty, otrzymane z podziału $W$,

## *Parametr & Młody Matematyk*

- Impressive publication, but largely a one-man show: Rusiecki (AMR)
- Vol 1 (1930) 399 pp.
  - 45 articles by 24 different authors, 12 by AMR
  - 58 notes by 17 authors, 33 by AMR
  - 140 problems, 18 solutions, largely by AMR
- In every issue, AMR complained about overwork!
- Vol 2 (1931–1932)
- Vol 3 (1939)
- Tarski published there
  - 1 pedagogical paper,
  - 2 research papers,
  - & fostered 1 more, by Henryk Moese.
- But today I'm interested in the *problems* he contributed.

# Problems Posed

- **Why do that?**
  - **They're beautiful**
  - **For bravado**
  - **For instruction**
  - **To identify the elite**
- **In Vols. 1–2 of *Parametr* (including *Młody matematyk*)**
  - **218 numbered problems & a few others**
  - **AMR: 76 of them … 35%**
  - **Tarski: next with 14 … 6%**
  - **Most others collected by AMR from examinations**
- **What had Tarski in mind?**

**CONTEST PROBLEM II**

**Exercise on Diluting Wine**

**A winemaker had two barrels; one had a volume of $a$ liters, and the second, $b$ liters. The first barrel was filled with pure wine but the second was empty. The winemaker poured a certain amount of wine— $x$ liters —from the first barrel to the second, and filled up the second barrel with water. After mixing the wine and water, the winemaker poured from the second barrel to the first just enough so that the first barrel became full. It turned out that in the first barrel was the kind of wine that we would obtain if, into the barrel containing $a$ liters, we poured $c$ liters of pure wine and filled up the remaining [volume] with water.**

**Find $x$ and report for what values of the givens $a, b, c$ we have (1) two solutions, (2) one solution, (3) a problem with no solution.**

***Dr. Alfred Tarski* (*Warsaw*)**

**Tarski [1930] 2012a**

$$¿\ \exists x\ [\ (a - x) + x^2/b = c\ ]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$¿\ \exists x\ [\ x^2 - bx + (a - c)b = 0\ ]$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$¿\ b^2 - 4(a - c)b \geq 0$$

***Quantifier elimination!***

# An Instance of
# *Hauber's Law*

$x^2 + Bx + C = 0$

$D = B^2 - 4C$

$$\left.\begin{array}{lllll} D > 0 & \vee & D = 0 & \vee & D < 0 \\ \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\ \exists!^2 x & & \exists! x & & \neg\exists x \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{The } \Downarrow \textit{ are reversible.}$$

**Exhaustive**

**Exclusive**

- **Useful in several problems for organizing cases**

- **Featured as a logical tool in**
  - **Chwiałkowski, Schayer & Tarski 1935, *Geometrja dla trzeciej klasy gimnazjalnej***
  - **Tarski [1936] 1995, *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej***

**Exercise 167.** ***System of inequalities.*** **Investigate what conditions must numbers $k$, $l$, $m$ satisfy so that there should exist an angle $\varphi$ in the first quadrant $(0 \leq \varphi \leq 1/2\,\pi)$ satisfying the following two inequalities simultaneously:**

$$k \cos \varphi + l \sin \varphi \leq m$$
$$k \sin \varphi + l \cos \varphi \leq m.$$

***Ten points for solution. A. Tarski (Warsaw)***

Tarski [1931] 2012b

➠ ¿

$$\exists x,y \begin{bmatrix} x,y \geq 0 & \& & kx + ly \leq m \\ & \& & \\ x^2 + y^2 = 1 & \& & lx + ky \leq m \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ ¿

a very complicated disjunction of conjunctions of linear inequalities involving only $k, l, m$.

- ♦ Emphasizes
  - *Inequalities*
  - *Quantifier elimination*
  - *Case-ridden argument*

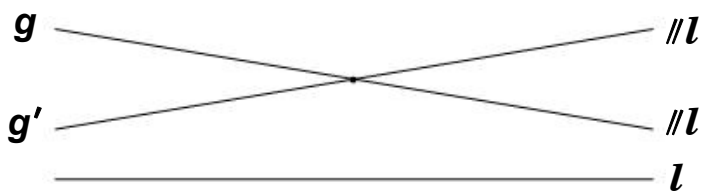
**Exercise 183.** ***Postulate about parallels.*** **Accepting the system of axioms for Euclidean geometry given by David Hilbert, or any system established in one of the Polish school texts on elementary geometry, show that the axiom of parallelism can be replaced by the statement,**

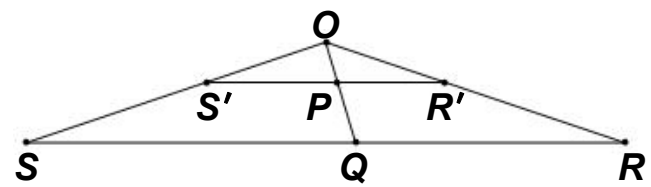
> ***For every point interior to a convex angle there exists at least one segment which passes through this point and has endpoints on the edges of the given angle.***

***Five points for solution.*** ***A. T.*** **(*Warsaw*)**

**Tarski [1931–1932] 2012b**

- **From 1927–1928 Warsaw logic seminar.**
- **This axiom was reported in Bonola [1906] 1955.**
- **It stems from Lorenz [1791–1792].**




- Hilbert used Playfair's axiom: this data $\Rightarrow$ $g = g'$.
- It mentions points, lines, incidence.

- Tarski's axiom mentions only points, betweenness $\beta$:

  $\beta OPQ$ & $\beta R'PS'$ & $O \neq P$ $\Rightarrow$
  $\exists R \exists S(\beta OR'R$ & $\beta OS'S$ & $\beta SQR)$

- Tarski's axiom is closely related to the Pasch axiom.
- There are still good research problems on that relationship.

- The exercise uses
  - simple mathematics, but a
  - sophisticated idea: *axiomatics*.

- Final example, to accent two recurring features: emphasis on
  - *geometry*, and on
  - *case-ridden arguments*.

> **Exercise 214.** ***Arranging two segments in a plane.*** **Given on a plane is a figure consisting of two segments. Indicate all axes and centers [of symmetry] of this figure, lying in its plane. Give an exhaustive discussion of the possible cases.**
>
> ***Five points for solution.*** ***A. T.*** **(*Warsaw*)**

Tarski [1931–1932] 2012e

- A solution is a fine tour of elementary geometry,
  - including an introduction to symmetry, but
  - organizing it is a major piece of knowledge engineering.

# Assessment (1)

- Tarski's major emphases were
  - Geometry
  - Inequalities
  - Organizing case-ridden arguments
  - Quantifier elimination (tacit)

- For several problems,
  - the form of a solution was not clearly specified.

# Assessment (2)

- **218 exercises in *Parametr* . . . . . 84 (39%) solutions published through 1939. 1930–1932 including *Młody.***

- **26 rated $\geq$ 10 pts . . . . . Only two solutions of these.**

- **Solvers:**

| | | |
|---|---|---|
| gimnasjum students . . . . . | 20 | Very many published solutions apparently due to editor Rusiecki. |
| gimnasjum faculty . . . . . | 13 | |
| others . . . . . | 17 | |

- **Rusiecki:** ***Not enough!***

- **Tarski:** **14 problems . . . . . Only two very easy solutions published.**
  **6 rated $\geq$ 10 pts**

# Assessment (3)

- **Why did Tarski propose the problems?**
  - **They're beautiful . . . . . Yes, but Tarski never dwelt on that.**
  - **For bravado . . . . . Maybe, but . . .**
  - **For instruction . . . . . Evidently not much.**
  - **To identify the elite . . . . . !?**

- **Goals may simply have been confused,**
  - **or Tarski's problems unrealistically difficult.**
  - **If not, then . . .**

- **The editors &/or Tarski evidently intended them**
  - **not for fostering development of talented students in general,**

  **but as**
  - ***stimuli for the very topmost*, and**
  - ***as means of identifying those*.**

# Confirmation

- Our conclusions agree with recollections of Tarski's 1934–1938 high-school student Witold Kozlowski:
  - Tarski's favorite area was geometry.
  - Gifted students → his home.
  - Tarski's Univ. students → his school lectures.

Joanna & Andrew McFarland
Witold Kozlowski (1919– )

*Coming!*

# Alfred Tarski

## Early Works: Geometry and Teaching

### With a Bibliographic Supplement

Translated and edited by
Andrew McFarland
Joanna McFarland
James T. Smith

Birkhäuser
Boston • Basel • Berlin

Alfred Tarski (1901–1983)

**History and Pedagogy of Mathematics**
**Americas Section, West Coast Meeting**
**Point Loma Nazarene University**

**1-2 October 2011**

***Thank you for your interest!***

**James T. Smith, Professor Emeritus**
**San Francisco State University**

# Alfred Tarski: Problems for Students and Teachers

## References

James T. Smith
smith@sfsu.edu

This list of works featured in this presentation is extracted from the current working draft of Tarski 2012, and will change before its publication. For other works, consult Givant 1986 or me.

Banach, Stefan, and Alfred Tarski. [1924] 2012. On Decomposition of Point Sets into Respectively Congruent Parts. In section 2.3 of Tarski 2012. Translation of "Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents," *Fundamenta Mathematicae* 6: 244–277, reprinted in Banach 1967, 118–148, and in Tarski 1986a, volume 1, 119–154.

Bonola, Roberto. [1906] 1955. *Non-Euclidean Geometry: A Critical and Historical Study of Its Developments*. Translated, with additional appendices by H. S. Carslaw, an introduction by Federigo Enriques, and a supplement containing George Bruce Halsted's translations of works by János Bolyai and N. I. Lobachevsky. New York: Dover Publications. Bonola's book was first published in 1906 by Nicola Zanichelli in Bologna as *La geometria non-euclidea: Esposizione storico-critico de suo sviluppo*.

Chwiałkowski, Zygmunt, Wacław Schayer, and Alfred Tarski. [1935] 1946. *Geometrja dla trzeciej klasy gimnazjalnej*. Second edition, reprinted. Hanover: Polski Związek Wychodźctwa Przymusowego w Hanowerze. The title means *Geometry for the third gimnasjum class*; the publisher's name means Polish Association of Forced Emigration. Originally published in Lwów by Państwowe Wydawnictwo Książek i Pomocy Szkolnych (National School Books Publisher). This edition was first published in Jerusalem in 1944.

Feferman, Anita B., and Solomon Feferman. 2004. *Alfred Tarski: Life and Logic*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Givant, Steven R. 1986. Bibliography of Alfred Tarski. *Journal of Symbolic Logic* 51: 913–941.

Hilbert, David. 1922. *Grundlagen der Geometrie*. Fifth, enlarged edition. Wissenschaft und Hypothese, 7. Leipzig: B. G. Teubner. Hilbert 1971 is an English translation of the tenth edition. The material cited in this presentation is different from that in the original 1899 edition.

———. 1971. *Foundations of Geometry* (*Grundlagen der Geometrie*). Second edition. Translated by Leo Unger from the tenth German edition. Revised and enlarged by Paul Bernays. LaSalle, Illinois: Open Court.

Kac, Mark. 1985. *Enigmas of Chance: An Autobiography*. New York: Harper & Row, Publishers.

Lorenz, Johann Friedrich. 1798–1807. *Grundriss der reinen und angewandten Mathematik, oder der erste Cursus der gesamten Mathematik*. Two volumes. Volume I: *Der erster cursus der Arithmetik und Geometrie*. Volume II: *Der erster cursus der angewandten Mathematik*. Helmstädt: Carl Gottfried Gleckeisen.

Moese, Henryk. [1932] 2012. Contribution to A. Tarski's problem "On the degree of equivalence of polygons." In section 2.5 of Tarski 2012. Translation of "Przyczynek do problemu A. Tarskiego: 'O stopniu równoważności wielokątów,'" *Parametr* 2 (1931–1932): 305–309. A draft translation by Izaak Wirszup, with the same title, appeared in Tarski and Moese 1952, 9–14.

Smith, James T. 2010. Tarski, schools, and geometry. Presentation to the West Coast Meeting, History and Pedagogy of Mathematics, Americas Section, October 2010.

Sznajder, Roman. 2010. 90th anniversary of emergence of the Polish School of Mathematics; Polish mathematics between the world wars. Presentation to the East Coast Meeting, History and Pedagogy of Mathematics, Americas Section, March 2010.

Tarski, Alfred. See also entries under Banach and Chwiałkowski.

———. [1930] 2012a. Exercise: On diluting wine. In section 3.5.1 of Tarski 2012. Translation of "Zadanie o rozcieńczaniu wina," *Parametr* 1: 229, reprinted in Tarski 1986a, volume 4, 688.

———. [1931] 2012a. The degree of equivalence of polygons. In section 2.4 of Tarski 2012. Translation of "O stopniu równoważności wielokątów," *Młody matematyk* 1: 37–44, reprinted in 1975 in *Delta* 5 (4): 3–6. A draft translation by Izaak Wirszup, with the same title, appeared in Tarski and Moese 1952, 1–8. The original and that draft were reprinted in Tarski 1986a, volume 1, 561–580.

———. [1931] 2012b. Problem 167: System of inequalities. In section 3.5.7 of Tarski 2012. Translation of "Nr. 167: Układ nierownóści," *Młody matematyk* 1: 46, reprinted in Tarski 1986a, volume 4, 692.

———. [1931–1932] 2012a. Further remarks about the degree of equivalence of polygons. In section 2.6 of Tarski 2012. Translation of "Uwagi o stopniu równoważności wielokątów," *Parametr* 2: 310–314. A draft translation by Izaak Wirszup, with the same title, appeared in Tarski and Moese 1952, 15–20. The original and that draft were reprinted in Tarski 1986a, volume 1, 595–602.

———. [1931–1932] 2012b. Problem 183: Postulate about parallels. In section 3.5.11 of Tarski 2012. Translation of "No. 183: Postulat o równoległych," *Parametr* 2: 78, reprinted in Tarski 1986a, volume 4, 691.

———. [1931–1932] 2012e. Problem 214: Arrangement of segments in a plane. In section 3.5.14 of Tarski 2012. Translation of "No. 214: Układ dwóch odcinków na płaszczyźnie," *Parametr* 2: 207, reprinted in Tarski 1986a, volume 4, 691.

———. [1932] 2012. The theory of the circumference of a circle in the secondary school. In section 3.3 of Tarski 2012. Translation of "Teorja długości okręgu w szkole średniej," *Parametr* 2 (1931–1932): 257–267, reprinted in Tarski 1986a, volume 1, 581–594.

———. [1936] 1995. *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*. Second, revised edition. Translated by Olaf Helmer. New York: Dover Publications, Inc. Originally published in 1941 by Oxford University Press, with second and third editions in 1946 and 1965. Expansion and translation of *O logice matematycznej i metodzie dedukcyjnej*, Bibljoteczka Matematyczna, volume 3-5. Lwów and Warsaw: Książnica-Atlas. The original title means *On Mathematical Logic and the Deductive Method*. Tarski 1994 is a fourth edition.

———. 1986a. *Collected Papers*. Edited by Steven R. Givant and Ralph McKenzie. Four volumes. Basel: Birkhäuser.

———. 1994. *Introduction to Logic and to the Methodology of the Deductive Sciences*. Fourth edition. Translated from the Polish by Olaf Helmer. Edited and with a preface and biographical sketch by Jan Tarski. Oxford Logic Guides, 24. New York: Clarendon Press. For earlier editions, see item Tarski [1936] 1995.

———. 2012. *Early Works: Geometry and Teaching, With a Bibliographic Supplement* (working title). Translated and edited with commentary by Andrew McFarland, Joanna McFarland, and James T. Smith. New York: (to be published by Springer).

Tarski, Alfred, and Steven R. Givant. 1999. Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic* 5: 175–214. See 197–198.

Tarski, Alfred, and Henryk Moese. 1952. *Concerning the Degree of Equivalence of Polygons*. Translated by Izaak Wirszup. Chicago: The College, University of Chicago. A reproduced typescript, this contains draft translations of Moese [1932] 1952 and Tarski [1931] 2012a and [1931–1932] 2012a.